

無限旅館

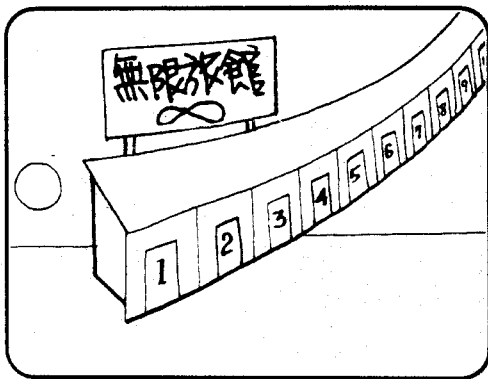


圖1：樂他博士臨走前，講了一個很絕的故事，他說：「我們星河的中心有家很大的旅館—無限旅館，它的房間有無限多個，而且通過黑洞，延伸到更高的另一度空間中。房間號碼從一開始一直下去。」

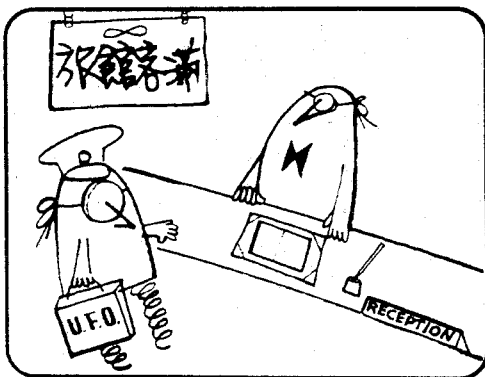


圖2：樂他博士接著說：「有一天，所有房間都客滿，來了位飛碟駕駛員，他正好路過此地。」

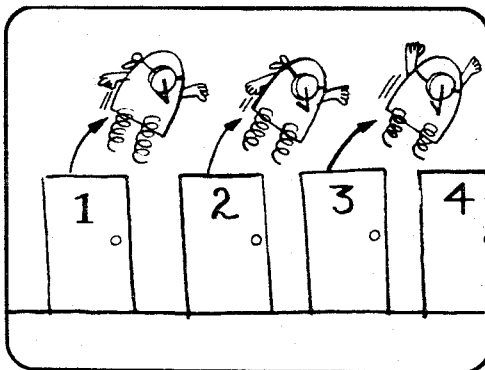


圖3：樂他博士：「雖然房間客滿，旅館經理仍替這位駕駛找出一間空房間。他只消把每個房間的房客，移到下一個房間，就能空出一號房給這位駕駛。」

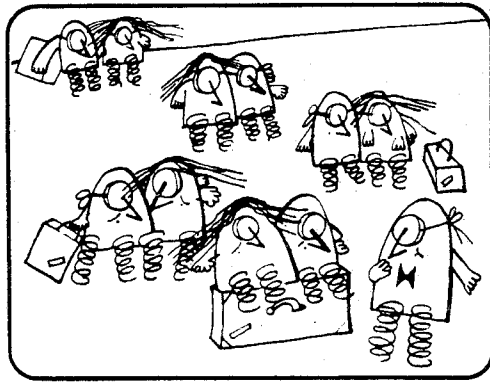


圖 4：樂他博士：「第二天，有五對正在渡蜜月的夫婦來到，無限旅館能容納他們嗎？沒問題，經理只要把每一間的房客，都移到房號多 5 號的房間，就能空出一到五號的房間給這五對夫婦。」

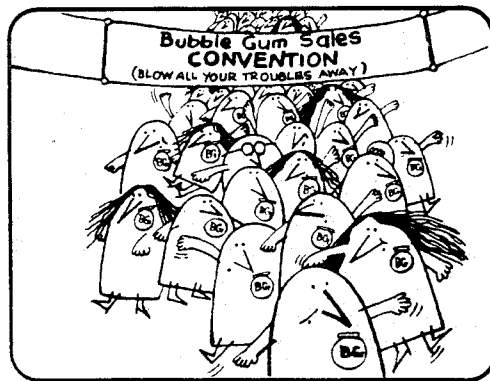


圖 5：樂他博士：「到了週末，來了數不清的泡泡糖銷售員到此渡假。」
赫曼：「我可以明白無限旅館怎麼容納新來的『有限』人數，可是怎麼替『無限的』人數，找到房間呢？」

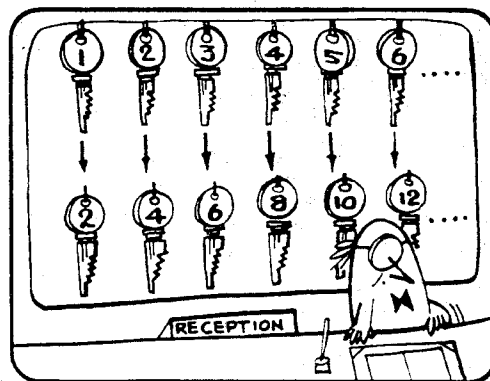


圖 6：樂他博士：「很簡單，我親愛的赫曼，經理只要把每個房間的人，移到原先房號雙倍的房間。」

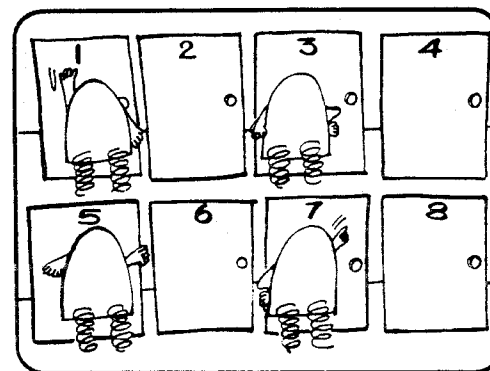


圖 7：赫曼：「原來如此，那麼每個房客都搬到雙號房，於是就可空出所有的單號房一數不清的房間，可以給數不清嚼泡泡糖的人。」

有限集合不能與它真子集合 (proper subset, 譯按：當而且只當集合A中的每一元素都是集合B中的元素，但B中的某些元素卻不是A中的元素時，稱A為B的真子集合) 有一對一的對應，而無限集合則不然。這看起來好像違反了成規——全部一定比部分大。事實上，一個無限集合可以定義為：一個能與它本身的真子集合，有一對一的對應關係的集合。

無限旅館的經理首先說明，所有數目組成的集合可以與它的真子集合有一對一的對應關係，並且因而空出一個和五個元素。很明顯的，這個過程可以變化調整，從原集合中抽離出一個無限集合，以便留下所求的元素——有限數目的元素。

另一個說明這種「截取」(subtraction)的方式是：想像有兩根無限長的量竿，並排在桌上，它們的起點都與桌子中央齊平，並且都標上了公分刻度，往右延伸到無限遠，彼此的公分尺度都能一對一對應： 0 對 0 ， 1 對 1 ， 2 對 2 ……一直下去，現在想像把一根量竿往右移 n 公分，如此一來，雖然刻度移動了，可是仍能與另一根固定的量竿有一對一的對應。如果是移動三公分，那麼對應關係就是： 0 對 3 ，

1對4，2對5……。移動過的 n 公分，可以代表兩根量竿相差的長度，而且量竿仍維持無限長。我們可以隨自己的喜好訂 n 的數目，很明顯的，從無限集合中截取某些集合，是個含糊的運作過程。

旅館經理最後一次的策略，打開了無數房間的門，正說明了如何從無限集合中抽離無限集合後，仍留下無限集合。把所有數目與所有偶數一對一對應後，就會留下另一個無限集合——所有奇數的集合。